Tentamen Dynamische Systemen I

21-11-2001: 13.00u - 16.00u

1. De afbeelding $f = f_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ wordt gedefinieerd door

$$f(\theta) = \theta + \frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n+1}\sin n\theta,$$

met $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

(a) Schets het faseportret van f_3.

(b) Bewijs dat f_n een diffeomorfisme is.

(c) Toon aan dat f precies twee periodieke banen van minimale periode n heeft. Bepaal het stabiliteitstype van deze banen.

(d) Bereken het rotatiegetal van f.

(e) Kan f periodieke punten hebben met minimale periode ongelijk aan n? Verklaar je antwoord.

(f) Is f Morse-Smale? Verklaar je antwoord.

(g) Geef de definitie van een chaotische evolutie. Heeft f chaotische evoluties? Verklaar je antwoord.

(h) Geef de definitie van gevoelige afhankelijkheid van beginvoorwaarden. Zijn er punten waar f gevoelige afhankelijkheid van beginvoorwaarden heeft? Verklaar je antwoord.

2. Beschouw het vectorveld

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 - \mu, \end{aligned}$$

met $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, en parameter $\mu \in \mathbb{R}$.

(a) Bereken de evenwichten van dit systeem en hun stabiliteitstype, afhankelijk van μ.

(b) Bepaal de bifurcation punten (van evenwichten), en teken een bifurcatie diagram.

(c) For elk bifurcatie punt, schets een faseportret voor alle kwalitatief verschillende gevallen, d.w.z., voor μ links en rechts van het bifurcatie punt, en in het bifurcatie punt.

(d) Geef in deze faseportretten de stabiele en instabiele variëteiten (manifolds) van de zadelpunten aan.

Z.O.Z

3. Laat $f = f_\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de afbeelding zijn die gedefinieerd is door

$$f_\alpha(x) = \alpha(2x \bmod 1),$$

met parameter α. In deze gehele opgave nemen we $\alpha > 1$.

(a) Schets de afbeelding f voor $\alpha = 2$.

(b) Laat $\Lambda \subset [0,1]$ de verzameling zijn van alle punten waarvan de voorwaartse baan bevat is in $[0,1]$. Leg uit hoe Λ te construeren is.

(c) Bewijs dat Λ een niet-lege compacte verzameling is met Lebesgue maat nul.

(d) Bereken de (grootste) Lyapunov exponent in elke $x \in \Lambda$.

(e) Geef de definitie van een uiteindelijk periodiek punt (in het geval van afbeeldingen), en toon aan dat de verzameling van uiteindelijk vaste punten van f bevat is en dicht ligt in Λ.
Aanwijzing: gebruik symbolische dynamica. Beschrijf de symbolenverzameling, een geschikte afbeelding op deze verzameling, en een conjugatie tussen deze afbeelding en f. Je hoeft niet aan te tonen dat de conjugatie een homeomorfisme is, maar wel dat hij de twee afbeeldingen conjugeert.

(f) Bewijs dat Λ een Cantor verzameling is.

(g) Bepaal de 'box counting' dimensie van Λ.

(h) **Bonus opgave voor een half punt extra**: Bereken de topologische entropie van $f|_\Lambda$.